Aufgabe A1

Welche der nachfolgenden Funktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse bzw. punktsymmetrisch zum Ursprung? Bestimme durch Rechnung.

a) $f(x)=x^2$ b) $f(x)=x^3-2x$ c) $f(x)=2x^4-2x^2+1$
d) $f(x)=-2x^6+3x^2$ e) $f(x)=x(x^4-3)$ f) $f(x)=1{,}5x$
g) $f(x)=(x-2)(x+2)$ h) $f(x)=5x^3+4$ i) $f(x)=x^2(x-3)(x+3)$

Aufgabe A2

Stelle den Grad der nachfolgend aufgeführten ganzrationalen Funktionen fest, ist er gerade oder ungerade und welche Aussage ergibt sich daraus über das Symmetrieverhalten des Funktionsgraphen.

a) $f(x)=x\cdot(x^2-5)$ b) $f(x)=(x-2)^2+1$
c) $f(x)=x(x-1)(x+1)$ d) $f(x)=(x-1)(x-2)$
e) $f(x)=\frac{1}{3}x^3(6-x^2)$ f) $f(x)=(2-x)^2(2+x)^2$
g) $f(x)=(x-1)^3+3x^2+1$ h) $f(x)=(1-3x^2)^2$
i) $f(x)=(x-x^2)^2$ j) $f(x)=5x^3-x^2+1$

Aufgabe A3

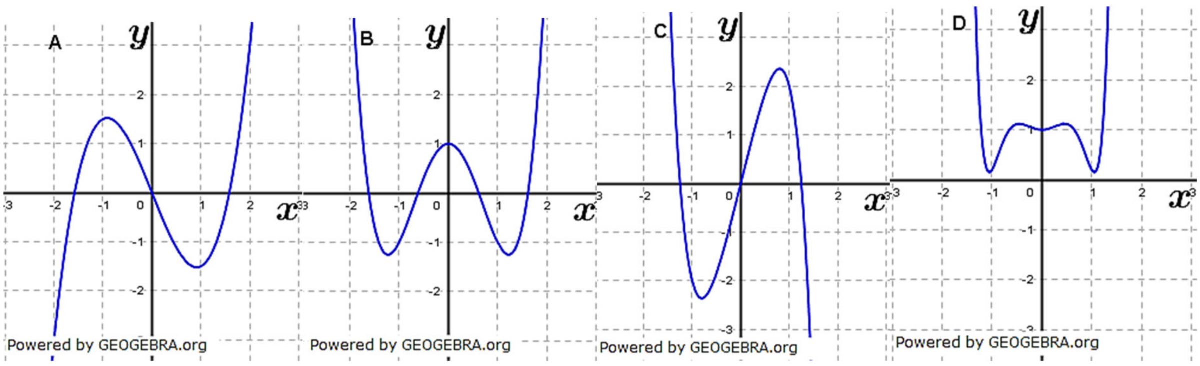
Untersuche, ob die Funktionen gerade oder ungerade sind.

a) $f(x)=3x^4-2x^2+4$ b) $f(x)=0{,}2x^3+3x$
c) $f(x)=x^4-4x^3+1$ d) $f(x)=2x^5-0{,}4x^3+7x$
e) $f(x)=x^4(3-x^2)+5$ f) $f(x)=\frac{4}{x^3}$

Aufgabe A4

Ordne jedem Graphen eine Funktion zu. Zu zwei Funktionen gehört kein Graph. Skizziere deren Graphen.

$f_1(x)=x^4-3x^2+1$ $f_2(x)=-x^5-x^3+4x$ $f_3(x)=x^8-3x^4-1{,}2x^2+1$
$f_6(x)=x^8-3x^4+1{,}2x^2+1$ $f_5(x)=-x^5-x^3-4x$ $f_4(x)=x^3-2{,}5x$

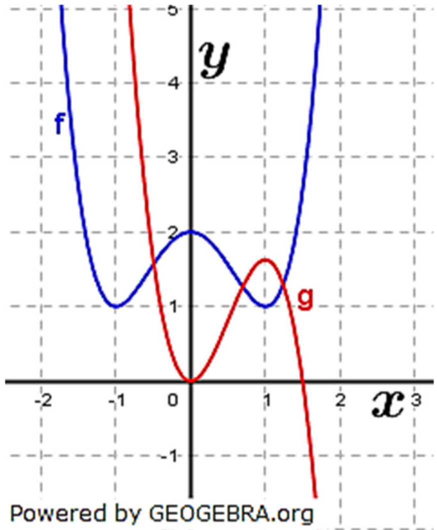


Aufgabe A5

Gib anhand der beiden Graphen in nebenstehender Abbildung an, welche Aussagen zutreffen

a) für die Funktion f, b) für die Funktion g.

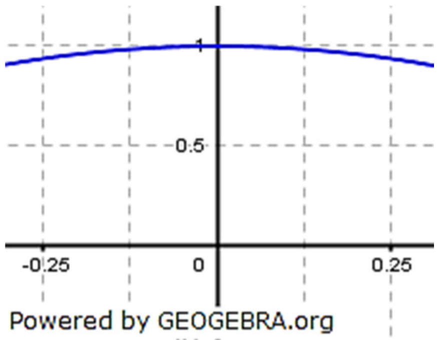
1) Der Graph ist symmetrisch zur y-Achse.
2) Im Funktionsterm kommen Potenzen mit geraden und ungeraden Hochzahlen vor.
3) Im Funktionsterm ist die Zahl vor der größten Potenz negativ.
4) Der Grad der Funktion ist ungerade.
5) Der Grad der Funktion ist mindestens 3.
6) Der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung.



Aufgabe A6

Zu welcher der angegebenen Funktionen könnte der abgebildete Graph gehören?

$f_1(x) = 0{,}1x^3 - x^2 + 1$ $f_2(x) = 0{,}1x^3 + x^2 + 1$
$f_3(x) = 0{,}1x^3 - x^2 + x + 1$ $f_4(x) = (x+1)(x-1)$
$f_5(x) = 0{,}001x^4 - x^2 + 1$ $f_6(x) = 5x^3 - x^2 + 1$



Aufgabe A7

Gegeben sind die Funktionen f, g, h und k mit $f(x) = x^3 - x$, $g(x) = x^2 + 2$, $h(x) = x^4 - 3x^2$ und $k(x) = x^5 + 4x$. Erzeuge aus diesen Funktionen jeweils eine neue Funktion mit folgenden Eigenschaften:

a) die Summe ist eine gerade Funktion,
b) die Differenz aus einer geraden und einer anderen Funktion ist gerade,
c) das Produkt ist eine ungerade Funktion,
d) der Quotient ist eine ungerade Funktion.

Aufgabe A8

a) Begründe allgemein, dass Summe, Differenz, Produkt und Quotient gerader Funktionen gerade sind. Gib jeweils ein Beispiel dafür an.
b) Wie verhält es sich mit der Summe, Differenz, Produkt und Quotient ungerader Funktionen?
c) Untersuche, welche Symmetrieeigenschaft sich für das Produkt zweier Funktionen ergibt, wenn eine der Funktionen gerade, die andere ungerade ist.

Lösung A1

Lösungslogik:
Prüfe zunächst Achsensymmetrie mit $f(-x)$ und dann Punktsymmetrie mit $-f(-x)$ falls erforderlich.

Klausuraufschrieb:

a) $f(x) = x^2$
$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ | Achsensymmetrie

b) $f(x) = x^3 - 2x$
$f(-x) = (-x)^3 - 2(-x) = -x^3 + 2x \neq f(x)$
$-f(-x) = -(-x^3 + 2x) = x^3 - 2x = f(x)$ | Punktsymmetrie

c) $f(x) = 2x^4 - 2x^2 + 1$
$f(-x) = 2(-x)^4 - 2(-x)^2 + 1 = 2x^4 - 2x^2 + 1 = f(x)$ | Achsensymmetrie

d) $f(x) = -2x^6 + 3x^2$
$f(-x) = -2(-x)^6 + 3(-x)^2 = -2x^6 + 3x^2 = f(x)$ | Achsensymmetrie

e) $f(x) = x(x^4 - 3) = x^5 - 3x$
$f(-x) = (-x)^5 - 3(-x) = -x^5 + 3x \neq f(x)$
$-f(-x) = x^5 - 3x = f(x)$ | Punktsymmetrie

f) $f(x) = 1{,}5x$
$f(-x) = 1{,}5(-x) = -1{,}5x \neq f(x)$
$-f(-x) = 1{,}5x = f(x)$ | Punktsymmetrie

g) $f(x) = (x-2)(x+2) = x^2 - 4$
$f(-x) = (-x)^2 - 4 = x^2 - 4 = f(x)$ | Achsensymmetrie

h) $f(x) = 5x^3 + 4$
$f(-x) = 5(-x)^3 + 4 = -5x^3 + 4 \neq f(x)$
$-f(-x) = 5x^3 - 4 \neq f(x)$ | Keine Symmetrie

i) $f(x) = x^2(x-3)(x+3) = x^4 - 9x^2$
$f(-x) = (-x)^4 - 9(-x)^2 = x^4 - 9x^2 = f(x)$ | Achsensymmetrie

Lösung A2

Lösungslogik:
Der Grad einer ganzrationalen Funktion ist gleich dem höchsten Exponenten von x. Achsensymmetrie liegt vor, wenn alle Exponenten von x geradzahlig sind. Punktsymmetrie liegt vor, wenn alle Exponenten von x ungeradzahlig sind und zusätzlich das absolute Glied a_0 fehlt.

Klausuraufschrieb:

a) $f(x) = x \cdot (x^2 - 5) = x^3 - 5x$ Dritten Grades und punktsymmetrisch
b) $f(x) = (x-2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 5$ Zweiten Grades und keine Symmetrie
c) $f(x) = x \cdot (x^2 - 5) = x^3 - 5x$ Dritten Grades und punktsymmetrisch
d) $f(x) = f(x) = (x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$
Zweiten Grades und keine Symmetrie
e) $f(x) = \frac{1}{3}x^3(6 - x^2) = 2x^3 - \frac{1}{3}x^5$ Fünften Grades und punktsymmetrisch
f) $f(x) = (2-x)^2(2+x)^2 = \left((2-x)(2+x)\right)^2 = 16 - 8x^2 + x^4$
Vierten Grades und achsensymmetrisch
g) $f(x) = (x-1)^3 + 3x^2 + 1 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 3x^2 + 1 = x^3 + 3x$
Dritten Grades und punktsymmetrisch

h) $f(x) = (1 - 3x^2)^2 = 1 - 6x^2 + 9x^4$ Vierten Grades und achsensymmetrisch
i) $f(x) = (x - x^2)^2 = x^2 - 2x^3 + x^4$ Vierten Grades und keine Symmetrie
j) $f(x) = 5x^3 - x^2 + 1$ Dritten Grades und keine Symmetrie

Lösung A3

Lösungslogik:

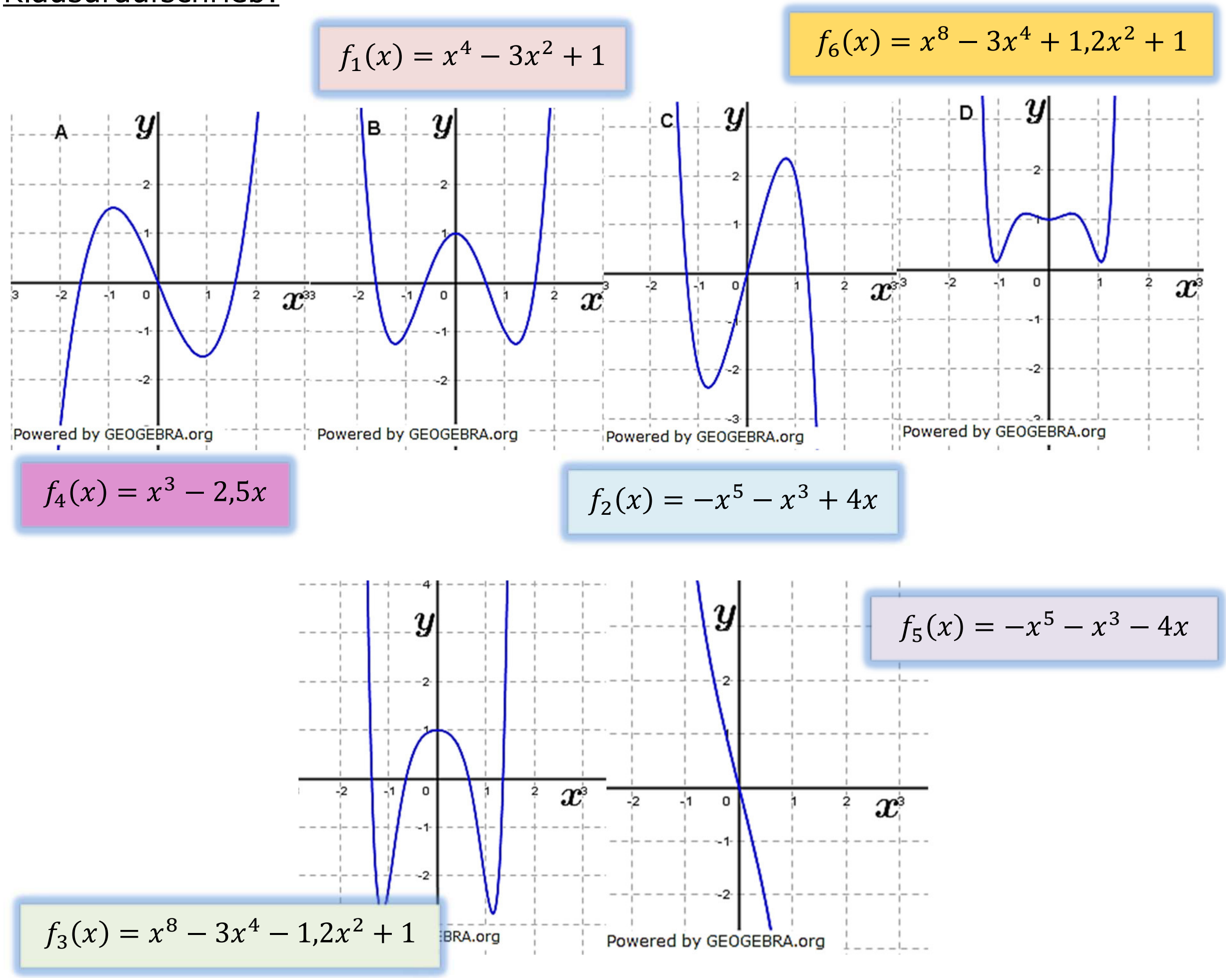
Gerade und ungerade **Funktionen** sind in der Mathematik zwei Klassen von **Funktionen**, die bestimmte Symmetrieeigenschaften aufweisen: eine reelle **Funktion** ist genau dann **gerade**, wenn ihr Funktionsgraph achsensymmetrisch zur y-Achse ist, und. ungerade, wenn ihr Funktionsgraph punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist.

Klausuraufschrieb:

a) $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 4$ Gerade Funktion da achsensymmetrisch.
b) $f(x) = 0{,}2x^3 + 3x$ Ungerade Funktion da punktsymmetrisch.
c) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$ Weder noch, da keine Symmetrie.
d) $f(x) = 2x^5 - 0{,}4x^3 + 7x$ Ungerade Funktion da punktsymmetrisch.
e) $f(x) = x^4(3 - x^2) + 5$ Gerade Funktion da achsensymmetrisch.
d) $f(x) = \frac{4}{x^3}$ Keine ganzrationale Funktion.

Lösung A4

Klausuraufschrieb:



Lösung A5

	f	g
Der Graph ist symmetrisch zur y-Achse.	☑	
Im Funktionsterm kommen Potenzen mit geraden und ungeraden Hochzahlen vor.		☑
Im Funktionsterm ist die Zahl vor der größten Potenz negativ.		☑
Der Grad der Funktion ist ungerade.		
Der Grad der Funktion ist mindestens 3.		☑
Der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung.		

Lösung A6

Der abgebildete Graph gehört zur Funktionsgleichung $f_5(x) = 0{,}001x^4 - x^2 + 1$.

Lösung A7

$f(x) = x^3 - x,\ g(x) = x^2 + 2,\ h(x) = x^4 - 3x^2,\ k(x) = x^5 + 4x$

a) Die Summe ist eine gerade Funktion:
$g(x) + h(x) = x^2 + 2 + x^4 - 3x^2 = x^4 - 2x^2 + 2$

b) Die Differenz aus einer geraden und einer anderen Funktion ist gerade:
$h(x) - g(x) = x^4 - 3x^2 - x^2 - 2 = x^4 - 4x^2 - 2$

c) Das Produkt ist eine ungerade Funktion,
$f(x) \cdot g(x) = (x^3 - x)(x^2 + 2) = x^5 + x^3 - 2x$

d) Der Quotient ist eine ungerade Funktion.
Kann nicht gebildet werden.

Lösung A8

a) Bei Summe und Differenz bleiben alle Exponenten von gleich groß. Sind diese gerade, so bleiben sie auch gerade.
Bei Produkt erfolgt Addition, bei Quotient erfolgt Subtraktion der Exponenten. Sowohl bei einer Summe als auch einer Differenz aus geraden Zahlen bleiben diese gerade. Beispiele mit $f(x) = x^8$ und $g(x) = x^4$:
Beispiel Summe: $f(x) + g(x) = x^8 + x^4$
Beispiel Differenz: $f(x) - g(x) = x^8 - x^4$
Beispiel Produkt: $f(x) \cdot g(x) = x^8 \cdot x^4 = x^{12}$
Beispiel Quotient: $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^8}{x^4} = x^4$

b) Bei Summe und Differenz bleiben alle Exponenten von gleich groß. Sind diese ungerade, so bleiben sie auch ungerade.
Bei Produkt erfolgt Addition, bei Quotient erfolgt Subtraktion der Exponenten. Sowohl die Summe als auch die Differenz zweier ungeraden Zahlen wird gerade. Beispiele mit $f(x) = x^7$ und $g(x) = x^5$:
Beispiel Summe: $f(x) + g(x) = x^7 + x^5$
Beispiel Differenz: $f(x) - g(x) = x^7 - x^5$
Beispiel Produkt: $f(x) \cdot g(x) = x^7 \cdot x^5 = x^{12}$
Beispiel Quotient: $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^7}{x^5} = x^2$

c) Produkt aus gerader und ungerader Funktion:
Da die Addition einer geraden mit einer ungeraden Zahl stets eine ungerade Zahl ergibt, sind ganzrationale Funktionen aus Produkten von geraden und ungeraden Funktionsgliedern ungerade und somit punktsymmetrisch.